II Test - Geometria

11 febbraio 2014

Esercizio 1. Nello spazio affine euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, in cui è fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sono dati il piano $\pi \ : \ x + y + z + 1 = 0$ e i punti $A(-1; 0; 0)$ e $B(0; 0; -1)$. Determinare le coordinate dei vertici dei quadrati di lato AB giacenti sul piano π. $\boxed{10}$

Esercizio 2. Nel piano affine euclideo reale è data la conica $\mathcal{K}$ di equazione:

$$\mathcal{K} \ : \ x^2 + 9y^2 + 6xy - 4x - 16y + 4 = 0.$$

(a) Classificare la conica dal punto di vista affine e proiettivo. $\boxed{2}$

(b) Determinare le coordinate del suo centro e le equazioni degli assi. $\boxed{4}$

(c) Scrivere un'equazione del fascio di coniche al quale $\mathcal{K}$ appartiene e avente come punti base $A(1; 1)$ con molteplicità 3 e $B(2; 0)$ con molteplicità 1. $\boxed{5}$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i seguenti vettori:

$$\vec{v_1} = (1; 1; 0), \qquad \vec{v_2} = (1; 2; 0), \qquad \vec{v_3} = (0; 0; 1).$$

(a) Dopo aver verificato che l'insieme $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \ \vec{v_2}, \ \vec{v_3})$ costituisce una base di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, determinare la forma bilineare simmetrica $g \ : \ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ per la quale $\mathcal{B}$ sia una base ortogonale e tale che:

$$g(\vec{v_1}, \vec{v_1}) = 0, \qquad g(\vec{v_2}, \vec{v_2}) = 1, \qquad g(\vec{v_3}, \vec{v_3}) = 2.$$

$\boxed{6}$

(b) Scrivere la matrice A associata a g rispetto alla base $\mathcal{B}$ e la matrice A' associata a g rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. $\boxed{4}$

(c) Stabilire se g è una forma bilineare definita positiva. $\boxed{2}$